di Gianfranco Brevetto

La matematica è spesso considerata come qualcosa di ostico. Molti studenti la percepiscono come un ostacolo che, nella migliore delle ipotesi viene, quando possibile, evitato. Perché? Da cosa dipende?

In quest'intervista dagli aspetti decisamente interessanti, la professoressa Anna Baccaglini-Frank, docente di didattica della matematica all'Ateneo di Pisa, ci aiuta a sfatare questo luogo comune, analizzandone aspetti e criticità.

– L'ambito di interesse dei suoi studi è la didattica della matematica. Quando si parla di scienze come la matematica, nell'immaginario collettivo si pensa di aver a che fare con argomenti nei quali c'è ben poco spazio per la fantasia. È proprio cosi?

– Io mi occupo di didattica della matematica, e ho una particolare passione per i processi di apprendimento mediati da software, ma mi occupo con piacere anche della progettazione di percorsi didattici in cui gli studenti sono portati a scoprire un nuovo sapere attraverso la manipolazione di artefatti fisici o digitali. Applico questa ricerca soprattutto nell'ambito delle difficoltà di apprendimento in matematica per arrivare a pratiche di didattica della matematica inclusiva.

Se da un lato capisco perché le persone possano pensare che ci sia poco spazio per la fantasia in matematica, dall'altro non concordo assolutamente con l'affermazione. Comincio facendo un'ipotesi su perché la gente (che non conosce davvero la matematica) pensi questo. L'errore che queste persone hanno subìto sulla loro pelle è stato quello di essere stati sottoposti a pratiche didattiche non adeguate, o meglio che si concentravano sull'applicazione di regole rigide, fredde, senza significato. La matematica insegnata e vissuta come un "far di conto" (purtroppo è ancora una visione dilagante) in effetti non ha spazio per la fantasia: devo imparare procedure per le operazioni in colonna, enunciati di proprietà delle operazioni senza alcun senso logico (agli occhi di chi è costretto a recitarle a memoria), risultati di operazioni come le "tabelline", e formule per i perimetri e le aree di figure geometriche (e pure a memoria le formule inverse!). Poi l'insegnante mi mostra come si fa un esercizio e me ne dà 50 uguali. Imparo procedure in modo meccanico e in generale sospendendo qualsiasi costruzione di significato. Dunque quello che voglio dire è che non è colpa di queste persone, ma del modo in cui è stata presentata loro la matematica.

Quelle poche persone che invece sviluppano una visione epistemologicamente corretta della matematica (di questi aspetti anche affettivi hanno parlato molto Rosetta Zan e Pietro Di Martino), come un sistema con pochi principi e "regole" con cui presentare i ragionamenti, ma estremamente libero, colorato e manipolabile, – e molte di queste persone poi non riescono più a staccarsi da questa bellissima disciplina – non sarebbero mai d'accordo con l'affermazione che in matematica non serva la fantasia – e pure tanta! Fare congetture, per esempio, è un'attività fondamentale in matematica, che purtroppo nelle pratiche scolastiche standard viene proposta troppo poco. Davanti a una situazione mi devo fermare a riflettere, devo imparare a farmi domande. Per esempio, nel cubo tutto pare "perpendicolare" mi chiedo se anche le diagonali (quelle che "tagliano" internamente il cubo) si incontrano perpendicolarmente. Una prima congettura potrebbe essere "sì, le diagonali si incontrano tutte perpendicolarmente". Innanzitutto, come matematico, mi chiedo pure se davvero si incontrano le diagonali, cioè che le rette a cui appartengono nello spazio davvero sono contenute in uno stesso piano e hanno quindi un punto in comune. E poi cerco di dimostrare la congettura. Mi immagino di "sezionare" il cubo osservando con gli occhi della mente la "fetta" che ottengo e che contiene queste due diagonali.

Se ho anche buone conoscenze teoriche e le riesco ad applicare, mi rendo conto che la fetta è un rettangolo e per di più un rettangolo non quadrato, perché due lati opposti sono proprio spigoli del cubo, mentre gli altri due sono le diagonali di due facce, e quindi hanno lunghezza moltiplicata per radice di due, rispetto agli altri due. Radice di due è maggiore di uno e quindi la sezione è un rettangolo non quadrato. Le diagonali di un rettangolo sono congruenti, s'incontrano nei rispettivi punti medi, ma se il rettangolo non è quadrato NON formano 4 angoli retti. Dunque le diagonali del cubo non si incontrano perpendicolarmente. La mia congettura è refutata e ho addirittura tutti gli elementi per scrivere una dimostrazione di un nuovo enunciato (che quindi diventerà un teorema: "In un cubo due diagonali interne non si incontrano perpendicolarmente".)

– Certo, lo trovo interessante.

– Ho voluto proporre un esempio di ragionamento per mostrare come processi di visualizzazione, che si affidano anche a scelte fantasiose, hanno bisogno di essere accompagnati da controllo teorico, cioè dalla messa in atto (che pure può richiedere fantasia) di proprietà e teoremi da scegliere tra quelli conosciuti, che consentono proprio di vedere cose che altrimenti una persona non riesce a vedere. In matematica lavoro cioè con la fantasia guidata dal rigore delle teorie matematiche in cui è sviluppato il ragionamento. Saper ragionare bene in matematica e quindi essere un buon matematico, richiede sì un'ottima conoscenza delle teorie di riferimento ma anche tanta fantasia!

Per quanto riguarda poi il mio ambito di ricerca, la didattica della matematica, siamo proprio in quelle che spesso sono chiamate "scienze sociali". Ci vuole moltissima fantasia e flessibilità nell'interpretare (anche in modi diversi!) il ragionamento (anche sbagliato) di uno studente, e ci vuole altrettanta fantasia per sviluppare e adattare materiali didattici perché siano efficaci con più studenti, idealmente con tutti. Ma sappiamo bene che una stessa proposta non va bene per tutti. Ecco che uno stesso argomento va affrontato in più modi, con più tipi di attività, attivando più canali per l'accesso e la produzione di informazioni. Poi, a differenza che in una certa teoria matematica, in cui dati gli assiomi e le regole di deduzione, la maggior parte dei matematici (affronto tra poco la questione di come ci sia comunque un margine di disaccordo anche all'interno della matematica stessa) accetta come vero un enunciato se esiste una sua dimostrazione, in didattica della matematica, se anche "dimostro", lavorando su un caso in qualche modo prototipico o su una popolazione, che una certa proposta è "buona" (rispetto a dei principi stabiliti all'inizio dello studio), non è detto che tale proposta sia universalmente di successo anche a parità apparente di condizioni didattiche. Tra l'altro quando mai possiamo avere la certezza di essere nelle "stesse" condizioni rispetto ad uno studio precedente? Ogni contesto è diverso e ogni studente è diverso. Tuttavia cerchiamo delle regolarità e dei risultati "replicabili" (prendendo con le pinze questo termine).

– Riprendendo il discorso della matematica in quanto "scienza esatta", legata spesso a concetti, teoremi, assiomi che sembrano non poter essere messe in discussione. Al di là della storica e nota contrapposizione tra euclidei e non euclidei, qual è lo stato del dibattito e le principali tendenze all'interno della comunità scientifica?

– Mi aggancio subito dalla domanda precedente perché associare "poca fantasia" al pensiero matematico è per certi versi simile al definirla "scienza esatta", cerco di spiegarmi. Prendo spunto da discussioni tra colleghi matematici su questi temi, a cui ho avuto il piacere di assistere. Alcuni matematici risponderebbero esplicitamente che non hanno mai capito l'affermazione «la matematica è una scienza esatta», quindi possiamo dire che non è un'affermazione universalmente condivisa, soprattutto tra chi pratica la disciplina. Aggiungo una nota storica: euclidei e non-euclidei non hanno mai litigato (i non-euclidei sono euclidei fino al midollo). Altri concordano che la visione della matematica come scienza esatta appartiene a un passato che è ormai superato. Il “legame” con “concetti, teoremi e assiomi” indiscutibili è ormai inesistente – questo a detta di chi si occupa proprio di logica matematica! Inoltre ci sono certamente stati eventi storici famosi che hanno aiutato la “concettualizzazione” della matematica come scienza esatta e autoritaria: l'”ipse dixit”, la capacità predittiva degli astronomi, la diatriba Newton-Leibniz, l’imposizione illuministica. Ma i matematici odierni sono ben consapevoli che la potenza della loro scienza resta soprattutto sulla chiarezza di quanto deboli siano le sue fondamenta. E qui sto citando ancora quanto hanno scritto dei miei colleghi matematici proprio in questi giorni.

La pratica matematica prevede come primo passo un salto qualitativo del pensiero umano da qualche aspetto reale, concreto, a un livello assolutamente astratto. Questo passaggio di astrazione, simile a quello che si richiede in filosofia è uno dei principali motivi per cui la matematica è difficile. Di questo parliamo nel nostro libro «Didattica della Matematica» (https://www.mondadorieducation.it/catalogo/didattica-della-matematica-0054349/)
Dunque il matematico stabilisce regole astratte di azione, che si chiamano assiomi, poi deriva dagli assiomi i teoremi; questo passaggio è esatto nel senso tecnico del termine: il teorema è di precisione assoluta rispetto agli assiomi. Tuttavia la precisione è relativa: il primo passaggio di astrazione sicuramente contiene errori. Quanto bene gli assiomi che il matematico ha scritto realizzano per davvero la descrizione dell’evento reale che si intende analizzare?

– Mi pare un quesito molto interessante.

– Un matematico applicato si prende l’enorme rischio di decidere che la descrizione astratta determinata dagli assiomi scelti approssima “bene” la realtà che intende descrivere (e non credo che ci sia una teoria matematica che si proponga di gestire il salto dall’astrazione alla realtà se non la fisica, per quel che vale). Quindi gli assiomi possono essere messi in discussione e come! Infatti ci sono diversi ambiti matematici e diverse applicazioni, ciascuna con il proprio sistema di assiomi.

Quindi, la matematica pratica è esatta, nel senso che una dimostrazione sbagliata è sbagliata e basta, ma non è reale, è totalmente astratta. Questo è allo stesso tempo un pregio grandissimo e un limite.

Inoltre la “pratica matematica” quello che i matematici fanno veramente, è una cosa molto poco “esatta” e molto fantasiosa, per i motivi che spiegavo prima. Ma ci tengo anche a condividere l’esperienza (così come la vede e racconta lui) di un matematico immerso nella sua quotidianità.

“Sul fatto che una affermazione possa essere sbagliata o no in pratica è molto difficile da dire. Tipicamente nella pratica mi convinco che una cosa è vera se è plausibile e l’argomentazione è abbastanza convincente. Ma se ne andasse della mia vita rifiuterei quasi tutti i lavori di analisi che accetto come referee, perché non sono in grado di controllare ogni affermazione […] Insomma, nella mia esperienza di analista, indubbiamente un settore delicato dove ci sono notazioni ambigue (quando quel segno di derivata indica una derivata classica? quando invece è classica ma quasi ovunque? quando è in senso debole?), singolarità nascoste, integrali impropri, spazi di dimensione infinita, insomma molto della giustezza di una dimostrazione si gioca sull’esperienza del lettore. Non dico sia impossibile controllare rigorosamente ogni passaggio, ma trovo difficile farlo già come essere umano.”

Per essere precisi, i logici ci dicono che la matematica non dice «vero-falso», dice «lo so dimostrare-non lo so dimostrare», e ci sono vari software che ora ci possono assistere nelle dimostrazioni. Tuttavia anche se un computer sa più matematica di un singolo matematico, i matematici insieme eseguono compiti enormemente superiori a quello che può fare un computer, o anche una rete di computer: risolvere un problema. Quindi la matematica è più di «tutta la matematica» che può sapere un computer, è anche saper risolvere problemi.

Per fare questo, come dicevo prima, e quindi anche per scoprire nuova matematica, bisogna lavorare di fantasia ed essere estremamente creativi. E anche la matematica applicata a "problemi" della realtà ha vari aspetti non esatti, per esempio la stima dell'errore. Questo comporta, per esempio, che appena una soluzione non è stabile da un punto di vista pratico non serve a nulla: basta guardare le previsioni del tempo o i litigi sul coronavirus.

– Oggi, qual è lo stato del dibattito e le principali tendenze all'interno della comunità scientifica?

– Infine, sullo stato del dibattito e le principali tendenze all'interno della comunità scientifica, possiamo dire che lo sviluppo della matematica nell'ultimo secolo l'ha trasformata in modo radicale e non ha più senso pensarla come «scienza esatta».
I matematici hanno dimostrato che, in una certa astrazione riconosciuta come molto appropriata, non è possibile sapere che cosa è vero e che cosa è falso. Sappiamo che risolvere un problema non è una questione binaria: il problema ha soluzione, il problema non ha soluzione. Anzi, la questione è ancora più vaga e impalpabile: dimostro che posso trovare una soluzione (e la cerco); non sono capace di dimostrare che la posso trovare, ma non so prevedere come questa situazione potrebbe svilupparsi nel futuro. Qualcuno potrebbe riuscire dove io ho fallito, oppure no. A detta degli stessi matematici, la consapevolezza matematica di questa "indecidibilità" è talmente ben realizzata che l'aspetto autoritario della "scienza esatta" è ormai un retaggio del passato (si vedano anche le recenti interviste ai modellisti matematici durante l'emergenza covid-19 svolte su MaddMaths!). (http://maddmaths.simai.eu/category/divulgazione/covid/)

– Occorre dire, e ne approfitto di aver il privilegio di parlare con un docente esperto come lei, che di solito abbiamo di questa materia dei ricordi scolastici un po' controversi: o la si ama o la si odia. Perché è cosi difficile parlare di matematica a scuola? quali sono le principali problematica relative al suo insegnamento?

– Beh, abbiamo già parlato degli errori didattici che vengono fatti fin dai primi anni di scuola, che vengono tramandati di generazione in generazione (io insegnerò come è stato insegnato a me, a meno che mi prenda il tempo di riflettere a fondo sulle mie pratiche magari sotto la guida di esperti in didattica della matematica), e che portano a una visione epistemologicamente distorta della matematica. Ma abbiamo anche appena visto come la matematica sia di per sé difficile proprio perché il suo rapporto con la realtà non è sempre così chiaro e a volte sfugge proprio. È l'unica disciplina i cui oggetti non esistono nella realtà: il numero tre, il quadrato…non esistono nella realtà, ma possiamo accedere soltanto a rappresentazioni di tali oggetti matematici. Diversi ricercatori in didattica della matematica hanno teorizzato in modo diverso questa caratteristica essenziale del linguaggio matematico. C'è chi parla di inaccessibilità a "rappresentazioni" di oggetti matematici (come se questi esistessero idealmente in qualche mondo platonico delle idee e noi ne vedessimo le proiezioni imperfette – questo viene dal nostro retaggio culturale) e c'è chi parla di "oggetti del discorso" e "linguaggio matematico", inteso in senso lato. Mi riferisco qui alla teoria molto convincente proposta dalla ricercatrice israeliana Anna Sfard, che radica le sue posizioni in Vygotsky e Wittgenstein, superando il binomio pensiero-linguaggio e parlando di "commognizione", che unisce indissolubilmente pensiero e linguaggio. Per lei la matematica è un particolare tipo di discorso, con un insieme di caratteristiche ben definite; gli oggetti matematici sono oggetti del discorso, il loro significato non sta da nessuna parte se non nel linguaggio stesso. Quindi che cos'è il quadrato? L'insieme di espressioni (interne e condivise con interlocutori esterni) usate per parlare di "quadrato". Tali espressioni sviluppano ad ogni occasione in cui parliamo di "quadrato", e piano piano, partecipando al discorso matematico – dapprima imitando gli esperti e poi rendendomi un po' alla volta più autonoma – tali espressioni diventano condivisibili dalla comunità esperta, diventano "endorsable narratives" (narrazioni condivise dalla comunità di esperti) su tale oggetto matematico.

Da questo punto di vista si può intravvedere bene quello che forse è l'ostacolo più grande nell'apprendimento della matematica e un paradosso: devo imparare a praticare un discorso di cui non so le regole. Ma non posso imparare le regole se non praticando il discorso stesso. Come fare? Sfard ci spiega che le metafore giocano un ruolo importantissimo nel superare questo paradosso. Imparo a parlare di oggetti che non conosco, parlando di altro, di un qualcos'altro, scelto dall'insegnante, che ha caratteristiche analoghe (ed è fondamentale imparare a distinguere ciò che è fondamentale nell'oggetto della metafora, che effettivamente è isomorfo all'oggetto matematico, da ciò che è in più, legato alla concretezza dell'oggetto di riferimento). Giocare con le metafore è una delle pratiche didattiche fondamentali per approcciare la costruzione di oggetti matematici (intesi come oggetti discorsivi); inoltre è fondamentale usare una pluralità di metafore perché solo così è possibile alla lunga scindere gli aspetti discorsivi propri dell'oggetto matematico da quelli particolari degli oggetti concreti utilizzati.

Ci sono poi i passaggi che portano da un livello di discorso a un livello-meta, per esempio quando si passa dal discorso sui numeri naturali a quello sui numeri razionali. Non tutto quello che potevo dire parlando di numeri naturali lo posso ancora dire ora che mi riferisco ai razionali. Per esempio "moltiplicare due numeri dà un numero più grande di ciascuno dei fattori" non è un'affermazione accettabile nell'insieme dei razionali (per esempio 2*1/2 = 1, che è più piccolo di 2). Questi passaggi di meta-livello sono estremamente ostici per studenti che non arrivano alla piena partecipazione esplorativa in matematica, ma che rimangono alla modalità di partecipazione rituale (imitando meccanicamente procedure imparate a memoria con l'obiettivo di accontentare l'insegnante, senza preoccuparsi di dare un senso a quello che fanno) o che si rifiutano del tutto di partecipare (per esempio dopo numerosi episodi di fallimento).

Sui fattori affettivi legati all'apprendimento della matematica, rimando ai numerosi studi di Rosetta Zan e Pietro Di Martino, ricordando soltanto che un risultato interessantissimo che hanno trovato dopo anni di ricerca è che nessuna persona che abbia sviluppato una visione epistemologicamente corretta della matematica, e che riesca in matematica, allo stesso tempo odia la matematica (o almeno loro non ne hanno ancora trovata una)!

– Lei si è molto occupata dell'insegnamento della matematica agli alunni con BES, mi riferisco, ad esempio e in particolar modo, ai DSA e agli scolari che hanno difficoltà ad apprendere le tabelline e a produrre calcoli a memoria. Come i suoi studi ci possono aiutare in questo campo.

– Rispetto allo studio della dislessia, delle difficoltà nella letto-scrittura, siamo ancora indietro per quanto riguarda l'ambito delle difficoltà in matematica, a volte chiamate "discalculia". Tuttavia non c'è ancora accordo sul significato del termine e sulla popolazione che ne è in qualche modo caratterizzata. Le difficoltà cognitive di apprendimento in matematica sono di vario tipo, e sicuramente abbiamo imparato che non ha proprio senso mettere tutti in una stessa categoria, e forse nemmeno identificare sotto-categorie per poi appiccicare altre etichette. Parliamo piuttosto di "spettro" di difficoltà (c'è chi parla di disturbo o disabilità, ma bisogna fare molta attenzione alle parole) di apprendimento in matematica. Oltre a risultati più "cognitivi" di cui racconto tra poco, ci tengo molto a pensare agli studenti e all'ambito educativo in termini di "essere" anziché di "avere". L'essere consente un pensiero (e quindi espressioni) in divenire: quello studente apprende secondo particolari modalità, che vanno scoperte, coltivate e potenziate; piuttosto che quello studente "ha un disturbo specifico dell'apprendimento", che mette in una condizione di staticità. Tanto più che al momento, per quanto riguarda la matematica, queste etichette vogliono dire poco o niente, e sicuramente da soli non consentono agli educatori di mettere in atto adeguate strategie di intervento e supporto, se non vengono studiate più a fondo, caso per caso.

Detto questo, è pure vero che abbiamo studiato, implementato, e validato alcune pratiche didattiche che sicuramente giovano a più studenti, rispetto a pratiche precedenti. Possiamo ricondurre la questione, ancora una volta, alla comunicazione, e al bisogno di trovare canali adeguati perché più studenti possano accedere alle informazioni e produrle (per esempio per partecipare a discussioni con la classe o per mostrare all'insegnante che sanno ragionare su un certo argomento). In particolare nel progetto PerContare (www.percontare.it) abbiamo sperimentato e pubblicato gratuitamente nella forma di materiali didattici e di guide online per insegnanti una varietà di proposte per i primi anni di scuola primaria, che abbiamo mostrato essere efficaci per prevenire difficoltà gravi di apprendimento in aritmetica. Ora sono disponibili i materiali per le classi prime e seconde, e da settembre 2020 anche quelli per le terze. Stiamo lavorando ora su materiali per classi successive, che sperimenteremo da settembre, sperando di poter rientrare a scuola almeno in modalità mista.

Per quanto riguarda in particolare l'ambito delle tabelline, e in generale quello dell'apprendimento dei cosiddetti fatti numerici, lavoriamo sulla costruzione del significato e sul ragionamento, prima di tutto. Approcciamo i significati lavorando nel contesto di artefatti fisici o digitali, che consentono a tutti gli studenti di interagire e manipolare oggetti fisici o digitali e di cominciare ad esprimersi piano piano in un linguaggio sempre più coerente con quello tecnico matematico (sempre sotto la guida dell'insegnante che svolge un ruolo essenziale in questo senso). Per esempio per le tabelline costruiamo i "diagrammi rettangolo", dei cartoncini quadrettati a forma di rettangolo, di cui si scopre l'area (il numero di quadretti di cui sono fatti) a partire da fatti conosciuti. Alla fine della prima i bambini sanno contare per 1, per 2 ma anche per 5 e per 10 senza difficoltà, e hanno lavorato molto sul calcolo mentale entro il 20 (ma facilmente estendibile anche oltre), e quindi per scoprire il risultato di 7×3, per esempio, possono scomporre il 7 in 5 e 2 e "contare il pezzo da 5 e il pezzo da 2", come dicono alcuni bambini. Quindi arrivano alla somma 15+6, che possono svolgere a mente in vari modi, per esempio scomponendo il 6 in 5 e 1 e pensare 15+5=20 e 20+1=21. Senza che vengano introdotte formalmente le proprietà della somma e del prodotto, i bambini le usano sui diagrammi rettangolo in modo coerente con le proprietà matematiche, che un domani impareranno anche formalmente (ma questo si può rimandare di parecchio). Per ricavare i fatti moltiplicativi, le tabelline, non servono cantilene verbali, filastrocche o canzoni (certo, chi vuole può imparare anche quelle), ma la manipolazione di oggetti concreti e l'uso di fatti imparati precedentemente. La matematica, infatti, si costruisce sempre su se stessa: non si devono fare argomenti che non siano in relazione con altri affrontati precedentemente, perché tutto va costruito in modo connesso e coerente. Solo in questo modo si capisce davvero la matematica e la si può ricordare. La nostra mente non è un computer: per ricordare fatti dobbiamo legarli a tanti altri, ad idee, a reti neurali che si attivano quando concetti "vicini" vengono sollecitati. Più recupero un fatto appreso e più lo automatizzo, perché il nostro cervello ci aiuta ad essere più efficienti quando possibile. Dunque, per ricordare le tabelline basta costruire i processi con significato e poi usarle tante volte, in tanti contesti significativi, e la mente le automatizzerà da sola. Poi un domani, dopo che per anni non ho più dovuto pensare alle tabelline, le saprò comunque ricordare perché me le ricaverò e velocemente tornerò ad automatizzarle se necessario. Tra l'altro imparare attraverso "productive struggle" (facendo fatica, sforzandomi in modo produttivo) è utile sia per ricordare le cose nel tempo (recupero dalla memoria a lungo termine) che per alleggerire la memoria di lavoro (quella a breve termine), che notoriamente si "offusca" quando siamo sotto stress, a causa di ormoni che rilascia il nostro corpo. Quindi, anche se lo studente subisce il momento di stress durante un compito o un'interrogazione e sente "annebbiarsi la mente", sarà in grado di ricostruire il fatto che momentaneamente sembra scomparso.

Inoltre, in uno studio longitudinale condotto durante i primi tre anni del progetto (2011-2014) abbiamo trovato che nelle classi sperimentali, in cui i fatti numerici sono stati insegnati come ho spiegato, le percentuali di bambini positivi ai test per la discalculia erano meno della metà rispetto a quelli delle classi di controllo, e nessun caso era di "discalculia pura". Quello che, come educatrice, trovo ancora più interessante è che nelle classi di controllo le strategie risolutive usate per il calcolo erano molto standardizzate, con un'alta percentuale di non-risposte e minore accuratezza; invece nelle classi sperimentali le strategie erano molto più variegate, l'accuratezza era maggiore e tutti i bambini rispondevano. Il "prezzo" da pagare nelle classi sperimentali è stato un allungamento dei tempi di automatizzazione di circa tre mesi. Prezzo, secondo me, pagabile tranquillamente alla luce dei numerosi benefici.

– Alcuni grandi filosofi sono stati non solo maestri di pensiero ma anche padri della logica matematica. Solo per citare alcuni, Aristotele, Cartesio Pascal, Leibniz. Quale è il filo comune di queste due discipline apparentemente così distanti?

– E' una domanda che non ricade propriamente del campo di cui mi occupo . Tuttavia ho avuto la possibilità di lavorare per vari anni con un collega, Alessandro Ramploud, che stimo moltissimo e che è originariamente (e sempre) un filosofo, ma che da anni si occupa insieme a me di didattica della matematica nella scuola primaria. Con lui ho avuto modo di chiacchierare spesso anche di filosofia (per quanto riesco a seguirlo in questi discorsi!) e andiamo sempre a finire sulla questione del "linguaggio". Tantissimo (se non tutto) mi sembra riconducibile a questo, un solidissimo filo rosso che ci unisce e che ci fa riflettere quanto su questioni didattiche che aspetti epistemologici.

Non è un caso, forse, che io abbia sempre dato così tanta importanza allo studio dei segni e al linguaggio in senso lato e a come evolve quando una classe di studenti si approccia alla matematica. Inizialmente i miei studi erano fondati teoricamente nel quadro della Mediazione Semiotica, una prospettiva vygotskiana sviluppata per la didattica della matematica dalle studiose italiane Maria Alessandra Mariotti e Mariolina Bartolini Bussi. Il quadro è ottimo per la pianificazione delle attività con artefatti, per lo studio dei segni situati sviluppati dagli studenti e per i processi di mediazione a lungo termine messi in atto dall'insegnante, che porta i segni situati a rimandare a significati più generali e coerenti con la teoria matematica di riferimento. Più recentemente ho studiato il quadro della Commognizione della Sfard, che citavo prima. Anche questo è di matrice vygotskiana, direi più radicale nello «schiacciare tutto» sul discorso, e consente di analizzare in modo molto dettagliato i discorsi che prendono piede durante le ore di matematica.

– Un'ultima domanda, che è anche una curiosità personale e si ricollega alla domanda precedente. Alcuni concetti matematici, che ora diamo per scontati, come il numero e più ancora lo zero, sono il frutto di un lungo travaglio di condivisione e di accettazione nella storia del pensiero umano, mi riferisco, in particolar modo, allo zero. Personalmente mi ha sempre spaventato che questa cifra, avesse la proprietà di annullare numeri d'infinità grandezza. Mi aiuti ad orientarmi in questa personale aporia esistenziale.

– Lo zero è un numero interessantissimo; alcuni matematici dicono, sorridendo, che per loro i numeri sono: zero, uno, e "tutti gli altri". Si può capire questo tipo di affermazione anche alla luce di ambiti matematici, come la teoria delle categorie, in cui si indicano gli "oggetti iniziali" con 0 e gli "oggetti terminali" con 1 – ma resto qui su cose più di base. Per motivi diversi, lo zero e l'uno occupano ruoli molto privilegiati e nascondono, in particolare lo zero, molti significati. Possiamo accennare ai significati ripercorrendo rapidamente tappe fondamentali dello sviluppo storico dello zero.

Nella Babilonia e nell'antica Grecia si parla del "nulla". Emerge, quindi il concetto di zero come nulla, che viene ripreso dai Romani. Un secondo significato, indipendente dal primo, emerge con gli astronomi del II secolo a.C., inventori del sistema numerico assiro-babilonese. Questi astronomi usarono un carattere speciale per indicare una posizione vuota nella scrittura posizionale di un numero frazionario; tuttavia usavano lo stesso carattere anche senza valore numerico, mettendolo davanti ai numeri per impedire letture erronee. Così cogliamo un secondo significato che verrà poi dato al nostro "zero", e che è quello di "segnaposto", o di segno che fa cambiare il valore delle altre cifre che ha intorno. Ma vi è anche un terzo significato, ovvero quello di "primo numero", o numero che precede tutti gli altri. I Maya, indipendentemente, avevano un segno che fungeva sia da segnaposto nel loro sistema numerico, sia come primo numero da cui cominciare a contare, ad esempio, i giorni del mese. Vediamo come i diversi significati si intrecciano in varie culture, segnando, quindi esigenze culturali comuni anche in popoli molto lontani.

Spesso si attribuisce all'astronomo indiano Brahmagupta l'introduzione dello zero (anche se non completamente coerente con l'uso moderno), ripreso in vari testi su cui si formò Fibonacci, che lo diffuse in Europa. Inizialmente lo "zephiro" di Fibonacci non è considerato una cifra, come lo sono invece quelle da 1 a 9, e nemmeno propriamente un numero, ma è un oggetto con cui bisogna "fare i conti". Da questo momento, ufficialmente, lo zero acquisisce il significato di "segnaposto vuoto".

Lo zero continua la sua storia travagliata e arriviamo John von Neumann che lo definisce come cardinalità dell'insieme vuoto e numero iniziale, da cui sono costruiti, per induzione, tutti i naturali. Questo modo di vedere lo zero supera anche, in qualche modo, l'assiomatizzazione dei naturali di Peano (che ancora oggi usiamo), e che invece non include lo zero nei naturali.

Non parlo qui dello sviluppo dei simboli per il concetto di zero – anch'esso molto travagliato – ma faccio invece qualche considerazione cognitiva.

Spesso in matematica concetti che hanno una storia lunga e travagliata, sono anche cognitivamente complessi da cogliere. Questo è il caso anche per lo zero, che notoriamente crea molti problemi a tanti studenti. Mi soffermo qui sulle prime difficoltà che possono incontrare gli studenti fin dai primi anni di scuola, lasciando stare per ora quelle legate ai significati e alle proprietà dello zero che si incontrano in classi successive (come per esempio la legge di annullamento del prodotto a cui forse si accenna nella domanda).

Per bambini di tre o quattro anni sembra che il significato principale con cui usano "zero" sia quello di nessuna quantità o la mancanza di quantità, anche se in genere non gestiscono lo zero come gli altri numeri naturali. Inoltre studi recenti suggeriscono che anche il significato di zero come numero che precede qualsiasi numero positivo, e cioè come oggetto appartenente allo stesso continuum dei numeri con cardinalità maggiore di quella dell'insieme vuoto, possa essere acquisito anche dai bambini alla scuola dell'infanzia. Questo non significa, però, che non emergano difficoltà nella gestione dello zero come numero. Infatti, vari studi hanno scoperto che associare il segno '0' a tali significati sembra richiedere tempi più lunghi rispetto a quelli legati ai segni convenzionali associati a quantità non nulle. Questa difficoltà ha conseguenze, per esempio, nella gestione dello zero sulla linea dei numeri, e si vede bene alla scuola primaria quando vengono forniti modelli fisici di linee dei numeri contenti la tacca dello 0. La presenza della tacca "0" può provocare errori legati al conteggio delle tacche: invece che contare i segmenti, magari considerandone l'estremo destro (la tacca che lo segna), alcuni bambini continuano a contare le tacche, inclusa la prima, cioè quella dello 0, dicendo "uno". Questa difficoltà non si risolve (come è stato proposto in alcuni libri di testo) eliminando lo zero dalla linea dei numeri: questo consente semmai di by-passare l'errore, ma non superarlo. È un errore importante, e va affrontato. Senza lo zero, non si ha il segmento [0,1] sulla linea dei numeri, e quindi l'unità di misura, che consente di operare con i numeri come misure – un altro significato importante. Dunque non risolviamo la difficoltà by-passandola, ma possiamo usare segni un po' diversi. Per esempio, in PerContare usiamo una tacca che sta dalla parte opposta rispetto alle altre e sopra ad essa c'è uno "zero ciccione" che sembra il punto di partenza, come per un pedone nel gioco dell'oca. In questo modo la tacca c'è, lo zero c'è, il punto di partenza c'è, l'unità di misura c'è, ma diminuiscono gli errori descritti sopra: i bambini indicano correttamente la tacca "1" quando cominciano a contare da "uno". Dunque, anche a livello didattico si possono fare scelte intelligenti, che aiutano a concettualizzare lo zero correttamente e in modo completo.

Il significato e l'uso dello zero come segnaposto, invece, ha bisogno di processi più lunghi e maggiore maturità. Se pensiamo ancora una volta al linguaggio, lo zero è, a differenza delle altre cifre, "muto" nei numeri, eppure ne cambia la lettura (e il significato delle altre cifre). Se devo leggere "105" o "10", non dico "zero", ma leggo "1" come "cento" nel primo caso e come "dieci" nel secondo. Addirittura nel caso di "10" devo dire una sola parola (non composta) "dieci" per indicare entrambe le cifre insieme; e sarebbe cambiato tutto se avessi dovuto leggere "01", perché allora avrei detto "zero uno" oppure solo "uno". È davvero complesso! Si intrecciano sintassi, lessico e semantica, che i bambini devono imparare a gestire simultaneamente e in modo interconnesso. Alcuni di questi aspetti possono essere alleggeriti dalla lingua della propria cultura di appartenenza: non tutte le lingue sono difficili quanto l'italiano (o l'inglese o il francese!) quando dobbiamo parlare di numeri e di "zero" in particolare. Per esempio, in Taiwanese si leggono anche gli zeri nei numeri a più cifre; e pare che i bambini commettano molti meno errori nella lettura di numeri a tre o a quattro cifre rispetto ai bambini inglesi!

Insomma, zero è un concetto molto complesso, e lo dimostra la sua storia.

– Non può terminare questo suo interessante discorso senza avermi detto dell'annullamento del prodotto.

– Provo a fare un ragionamento per continuità per cercare di spiegare un modo di pensare a questa proprietà. Immaginiamo di moltiplicare due lati di un rettangolo per trovare la sua area: un lato ha lunghezza a e possiamo pensarlo "grande" (per esempio più grande di 1) e fissato, mentre l'altro ha lunghezza b. Inizialmente anche b è "grande" ma un po' alla volta lo diminuiamo. L'area è sempre ab, ma appena b è minore di 1 (ma sempre positivo!) l'area diventa più piccola di a, e a mano a mano che b tende a zero anche l'area diventa sempre più piccola. Se continuiamo a diminuire b, facendolo tendere a zero, anche l'area sarà sempre più piccola della sua misura precedente, e cioè tende a zero. Al limite, quando b è proprio zero, anche l'area sarà nulla, perché un segmento a qualsiasi per un segmento nullo non dà area, cioè ab=0.

Link e materiali potenzialmente interessanti per il lettore

Tabelline, memoria, progetto PerContare

- Baccaglini-Frank, A. e Bartolini Bussi, M.G. (2016). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: Il progetto PerContare. *Form@re, 15*(3), 170-184. http://www.fupress.net/index.php/formare/article/view/17182/16622
- https://www.repubblica.it/scuola/2016/01/04/news/tabelline-130583615/
- http://maddmaths.simai.eu/didattica/errori-lentezza/
- Intervento al Senato della Repubblica qui anche in relazione alle difficoltà di apprendimento:

https://youtu.be/wNrsRBEmOE0 (direi di riprendere qualche estratto da qui)

Zero

- Baccaglini-Frank, A. (2014). Trattamento dello zero nel progetto PerContare. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 37*(3A), 3, 257-282.
- Dello Schiavo, L. e Baccaglini-Frank, A. (2017). La quantità del nulla. *Ithaca: Viaggio nella scienza X*, 95-108.